PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **15** (1987/1988)
Številka 6
Strani 338–341

Boris Horvat:

MAGIČNI DODEKAEDER

Ključne besede: naloge, razvedrilo.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/15/915-Horvat.pdf

MAGIČNI DODEKAEDER – nagradni natečaj iz 1. številke Preseka

V letošnji prvi številki Preseka smo objavili članek Kako nisva postala milijonarja. Boris Horvat in Miro Lozej v njem opisujeta svoje dogodivščine pri izumljanju "magičnega" dodekaedra, to je prostorske igračke, narejene po vzoru Rubikove kocke. Na nagradna vprašanja na koncu članka smo dobili samo dva odgovora – ali so bile nagrade premalo mikavne? Naloge sta rešila Peter Movrin in Sašo Dolenc, oba iz Ljubljane.

Sašo hodi v osmi razred osnovne šole in je odgovoril na vsa vprašanja, le prostornine sestavnih delov magičnega dodekaedra ni izračunal. V komentarjih je bil bolj redkobeseden in njegove izpeljave so bile še nekoliko okorne, zato pa tudi originalne. Posebno domiselno se je lotil izračuna prostornine dodekaedra, ki jo je dobil s seštevanjem in odštevanjem prostornine bolj enostavnih geometrijskih teles.

Peter (verjetno že srednješolec) je temeljito in elegantno izpeljal rešitve, dodal je tri nazorne skice in ni skoparil s komentarji. Majcena zamera bi bila samo, da ni ugotovil, da je pri prostornini dodekaedra izraz pod korenom popolni kvadrat. Objavljamo povzetek njegove rešitve, skupaj s skicami. Ker pravi, da "z izpeljavo enačbe za število robov in vogalov pa ne bomo odkrili Amerike", pa tudi objavljena je že bila v Preseku letnik 8, št. 3, bomo odgovorili samo na tretje in četrto vprašanje.

Za začetek iz slike 1 nastavimo zlati rez.

Iz podobnosti trikotnikov $\triangle ABC$ in $\triangle BDC$ sledi:

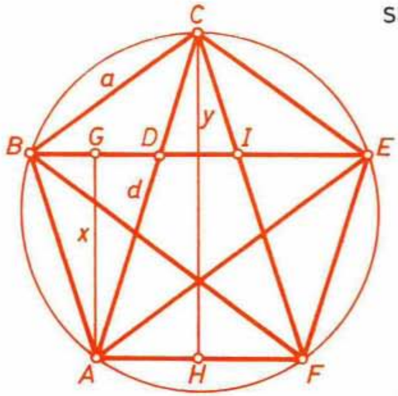
$$\frac{a}{d} = \frac{d-a}{a} \Rightarrow d = \frac{a(\sqrt{5}+1)}{2}$$

Višino x trapeza $ABEF$ izračunamo s Pitagorovim izrekom:

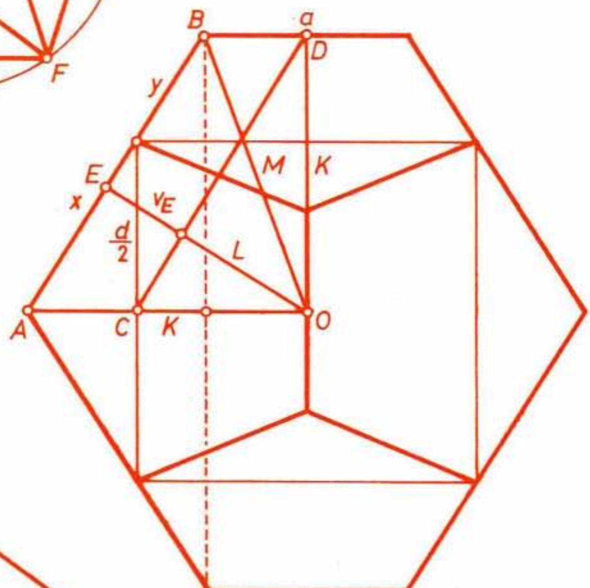
$$x^2 + \left(\frac{d-a}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow x = \frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

Izračunamo še ploščino trikotnikov $\triangle BDA$ in $\triangle DCE$: $(d-a)x = ay$, ploščino trikotnika $\triangle AFC$ pa zapišemo na dva načina: $a(x+y) = dx$. Dobimo tale razmerja:

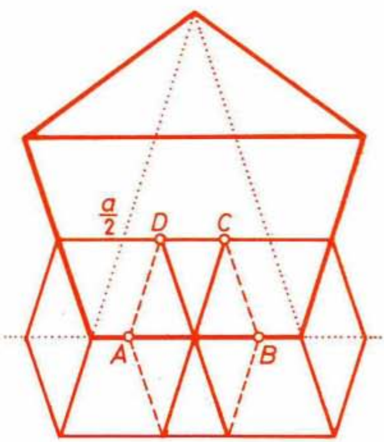
$$\frac{x}{y} = \frac{a}{d-a} = \frac{d}{a} = \frac{x+y}{x}$$



Slika 1



Slika 2



Slika 3

Zdaj lahko izračunamo polmere vseh treh krogel. Označimo jih s:

K — polmer krogle, ki se dotika robov — $\overline{OD}$ na sliki 2,
L — polmer včrtane krogle (dotika se ploskev) — $\overline{OE}$ na sliki 2,
M — polmer krogle, ki gre skozi vogale (očrtane) — $\overline{OB}$ na sliki 2.

Oglejmo si sliko 2.

Najprej nastavimo tale razmerja:

$$\frac{d}{2x} = \frac{K}{x+y} \Rightarrow K = \frac{a}{4}(3+\sqrt{5})$$

Polmer dodekaedru včrtane krogle L izračunamo tako, da na dva načina zapišemo ploščino trikotnika $\triangle AOB$:

$$(x+y)\,L = K^2 \Rightarrow L = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$$

Polmer dodekaedru očrtane krogle M pa je po Pitagorovem izreku:

$$M^2 = (\frac{a}{2})^2 + K^2 \Rightarrow M = \frac{a}{4}\sqrt{6(3+\sqrt{5})}$$

Prostornino vsakega pravilnega telesa lahko izrazimo kot vsoto prostornin n (n je število ploskev) pravilnih piramid, ki imajo za osnovo pravilni n—kotnik, za višino pa polmer pravilnemu telesu včrtane krogle. Imenujemo jih Juelove piramide. Ploščina pravilnega potkotnika p_5 je: (glej sliko 1); vsota ploščin romba $ABIF$, trikotnika CEF ter trikotnika BCI:

$$p_5 = ax + \frac{ax}{2} + \frac{(d-a)x}{2} \Rightarrow p_5 = \frac{a^2}{4}\sqrt{5.(5+2\sqrt{5})}$$

Prostornina dodekaedra pa je:

$$V_{12} = 12.\frac{p_5\,L}{3} \Rightarrow V_{12} = \frac{a^3}{4}\sqrt{10(47+21\sqrt{5})} = \frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5})$$

Slika 3 je nemara sprta z zakoni projekcije, vendar iz nje lepo vidimo, kakšna sta vogalni in robni element. Vogalni je nekakšna poševna kocka, ki jo omejuje 6 enakih rombov, robni element pa lahko razpolovimo na dve enaki piramidi, ki imata za osnovno ploskev enakokraki trapez $ABCD$, za višino v_E pa enako višino kot vogalni element. Baza trapeza $\overline{AB} = (d-a)$ je obenem rob malega dodekaedra v jedru, okrog katerega se vrtijo vsi gibljivi elementi. Zato je višina gibljive rezine, torej naših elementov, razlika med višinama Juelovih piramid velikega in malega dodekaedra. Pri tem je ξ sorazmernostni faktor.