

# PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 15 (1987/1988)

Številka 6

Strani 355-357

Roman Drnovšek:

## CAUCHYJEVA NEENAKOST

Ključne besede: matematika, Cauchy.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/15/915-Drnovsek.pdf>

© 1988 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

## CAUCHYJEVA NEENAKOST

V Preseku 14 (1986/87) št. 1 smo spoznali *Jensenovo neenakost*. Tokrat bomo obravnavali še eno tudi pomembno neenakost: Cauchy–jevo neenakost (izg. Koši). Ime je dobila po francoskem matematiku *Augustin Louisu Cauchyju* (1789 – 1857).

Neenakost se glasi:

Za realna števila  $a_1, a_2, \dots, a_n$  in  $b_1, b_2, \dots, b_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) velja:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$

pri čemer velja znak enakosti samo v primeru, ko je  $a_1 = t \cdot b_1, a_2 = t \cdot b_2, \dots, a_n = t \cdot b_n$  za neko realno število  $t$  ali pa je  $b_i = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Neenakost bomo dokazali na dva načina:

1. Hitro se prepričamo o veljavnosti *Lagrangeove enakosti* za realna števila  $a_i, b_j$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ):

$$\begin{aligned} & (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) = \\ & = (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n (a_ib_j - a_jb_i)^2 \end{aligned}$$

saj se po kvadriranju in množenju na desni strani dvojni produkti  $2a_i a_j b_i b_j$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$  in  $i < j$ ) uničijo, ostane samo vsota kvadratov  $(a_i b_j)^2$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ), kar pa je enako levi strani. Ker je vsota na desni strani enakosti nenegativna, je veljavnost Cauchyjeve neenakosti očitna. Enakost velja natanko tedaj, ko je  $a_i b_j = a_j b_i$ . Sedaj ločimo dva primera:

a) Če niso vsi  $b_i$  enaki nič, lahko predpostavimo, da obstaja tako naravno število  $i$ , da je  $b_i \neq 0$ . Tedaj je za vsa naravna števila  $j$  med 1 in  $n$  res  $a_j = a_i b_j / b_i$ . Če pišemo  $t = a_i / b_i$ , potem je  $a_j = t \cdot b_j$ .

b) Vsi  $b_i$  so enaki nič za vsa naravna števila  $i$  med 1 in  $n$ . V tem primeru tudi velja enakost.

Tako je prvi dokaz neenakosti končan.

2. Izhajamo iz očitne neenakosti, ki velja za poljubna realna števila  $a_1, a_2, \dots, a_n$  in  $b_1, b_2, \dots, b_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ter  $t$ :

$$(a_1 - b_1 t)^2 + (a_2 - b_2 t)^2 + \dots + (a_n - b_n t)^2 \geq 0$$

saj je vsota kvadratov realnih števil vedno nenegativna. Po kvadriranju in urejanju členov po potencah števila  $t$  dobimo:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) - 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) \cdot t + (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) t^2 \geq 0$$

Na levi strani neenakosti smo dobili kvadratno funkcijo. Ker je pri poljubnem realnem številu  $t$  nenegativna, je njena diskriminanta nepozitivna:

$$4.(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 - 4.(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \leq 0$$

Odtod takoj sledi Cauchyjeva neenakost:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

Enakost velja natanko tedaj, ko je diskriminanta enaka nič, oziroma natanko tedaj, ko obstaja realno število  $t$ , da velja  $a_i - b_i t = 0$  oziroma  $a_i = t b_i$  za vsako naravno število  $i$  med 1 in  $n$ .

Oglejmo si še dve posledici Cauchyjeve neenakosti:

1. V neenakost postavimo  $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1$  in naj bo  $a_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Tako dobimo:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot n \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$$

od koder po korenjenju in deljenju z  $n$  sledi:

$$\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)/n} \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)/n$$

V izrazu na desni strani prepoznamo *aritmetično sredino* nenegativnih realnih števil  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , na levi pa *kvadratno sredino* istih števil. Ugotovili smo, da kvadratna sredina ni manjša od aritmetične sredine poljubnih nenegativnih števil. Enakost velja le v primeru  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

2. Sedaj pa v Cauchyjevo neenakost postavimo  $a_i = \sqrt{x_i}$ ,  $b_i = 1/\sqrt{x_i}$ , kjer so  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) poljubna pozitivna realna števila. Tako dobimo po urejanju še eno pomembno neenakost:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n \geq n/(1/x_1 + 1/x_2 + \dots + 1/x_n)$$

Izraz na desni strani neenakosti se imenuje *harmonična sredina* pozitivnih realnih števil  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Aritmetična sredina pozitivnih realnih števil je večja ali kvečjemu enaka harmonični sredini. Za konec rešimo še eno nalogo, ki naj bo primer uporabe Cauchyjeve neenakosti.

Če za poljubna pozitivna realna števila  $x_i, y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) velja  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ ,  $y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1$ , potem je resnična tudi neenakost:

$$x_1^2/y_1 + x_2^2/y_2 + \dots + x_n^2/y_n \geq 1$$

Rešitev: Če v Cauchyjevi neenakosti napravimo zamenjave  $a_i = x_i/\sqrt{y_i}$  in  $b_i = \sqrt{y_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) dobimo neenakost:

$$(x_1^2/y_1 + x_2^2/y_2 + \dots + x_n^2/y_n)(y_1 + y_2 + \dots + y_n) \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$$

