PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **15** (1987/1988)
Številka 5
Strani 267–269

Franci Oblak:

AKSIOMATIKA, PROTISLOVJE, MODEL

Ključne besede: matematika, razvedrilo.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/15/909-Oblak.pdf

AKSIOMATIKA, PROTISLOVJE, MODEL

Učenci prvega razreda usmerjenega izobraževanja so sklenili izvesti šahovsko tekmovanje po naslednjem pravilu: vsak udeleženec mora igrati natanko tri partije. Barvo figur naj odloči žreb. Ko pa so hoteli napisati pravilnik tekmovanja, jim to ni uspelo. Na pomoč so poklicali profesorja matematike. Mate-

matik jih je vprašal, ali je število tekmovalcev sodo ali liho. Število tekmovalcev je bilo liho. Matematik je predlagal, naj napišejo pravila tekmovanja z aksiomi.

OSNOVNI POJMI

Uporabili so tri osnovne pojme: *igralec, partija, sodelovanje igralcev v partiji.* Napisali so štiri aksiome.

AKSIOMI

A1 Prvi aksiom. *Število igralcev je liho.*

A2 Drugi aksiom. *Vsak igralec sodeluje v treh partijah.*

A3 Tretji aksiom. *V vsaki partiji sodelujeta dva igralca.*

A4 Četrti aksiom. *Za vsaka dva igralca obstaja kvečjemu ena partija, v kateri sodelujeta.*

IZREKI

Prvi izrek je iz aksiomov izvedel matematik.

Prvi izrek. *Igralcev je vsaj pet.*

Dokaz. Ker je nič sodo število, po prvem aksiomu obstaja vsaj en igralec *A*. Ta igralec mora po drugem aksiomu sodelovati v treh partijah. V vsaki (od

Naj bodo to partije: p_1 , p_2 in p_3. Zato ima igralec A tri nastope: (p_1, A), (p_2, A) in (p_3, A). Torej mora biti število vseh nastopov enako $3.n$, če je n število igralcev. Ker pa je n po prvem aksiomu liho število in je produkt dveh lihih števil liho število, je res vseh nastopov – liho število.

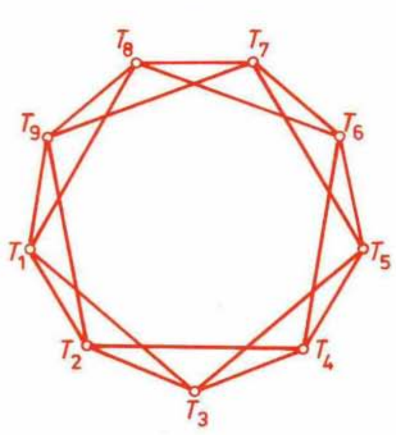
Matematik je povzel: Dana aksiomatika sicer omogoča dokazati nekaj izrekov, vendar sta med njimi dva, ki sta nasprotna. Tako aksiomatiko, v kateri moremo dokazati dve nasprotujoči si trditvi (izreka), imenujemo protislovna aksiomatika.

Posledica pa je, da tekmovanja po danih pravilih – aksiomih ni mogoče organizirati. Tak pravilnik ne obstaja – ni možen. Matematik je zatem predlagal, da pravilnik spremenijo v drugi točki. To je, namesto drugega aksioma A2 naj uporabijo aksiom:

A2′ Drugi aksiom(′). *Vsak igralec sodeluje v štirih partijah.*

In kaj se je zgodilo zdaj?! Matematik je prepričal učence, da v tem primeru ne more priti do protislovja, ne glede na to, koliko izrekov bodo izpeljali. Kako se mu je to posrečilo?

Oglejmo si pravilni devetkotnik. Oglišča naj predstavljajo igralce I_1, I_2, ..., I_9. Povežemo zaporedoma vsa oglišča in vsako drugo oglišče. Povezave imenujemo partije. Igralca, ki sodelujeta v partiji, sta na krajiščih povezave. Npr.: Daljica $I_1 I_3$ predstavlja partijo, v kateri sodelujeta igralca I_1 in I_3. S to sliko smo dobili model šahovskega turnirja. Kaj hitro uvidimo, da so vsi štirje aksiomi A1, A2′, A3 in A4 izpolnjeni. Preverimo!



Ker je igralcev devet – to je liho število, A1 velja. Ker iz vsakega oglišča izhajajo štiri daljice, res vsak igralec sodeluje v štirih partijah: A2′ velja. Ostala dva aksioma preveri sam.

MODEL

Zdaj pa predpostavimo, da iz A1, A2′, A3 in A4 izpeljemo dva nasprotna izreka. Kaj to pomeni? To pomeni, da moramo dokaz ponoviti tudi na modelu, ki ustreza aksiomom. Tedaj pa bi za devetkotnik veljala dva nasprotna izreka, kar pa ni mogoče. Zato mirno sklenemo: iz A1, A2′, A3 in A4 ne moremo izpeljati nasprotnih izrekov.

Franci Oblak