

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 15 (1987/1988)

Številka 4

Strani 213-215

Miha Štalec:

OD ENE NALOGE K DRUGI

Ključne besede: naloge, razvedrilo.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/15/902-Stalec.pdf>

© 1988 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

OD ENE NALOGE K DRUGI

Znano je, da nekatere naloge med reševanjem in po njem sprožijo kopico novih vprašanj. Za primer si pogledjmo sorazmerno preprosto nalogo, kakršnih je bilo v Preseku že veliko.

Naloga:

V četrtino kroga s polmerom r včrtaj kvadrat tako, da dve oglišči ležita na krožnici (slika 1).

Rešitev:

Pomagali si bomo z računom. Krožnica je v ravnini koordinatnega sistema določena z enačbo:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Če je še ne poznaš, poglej sliko 2 in se spomni Pitagorovega izreka.

Postavimo četrt kroga v koordinatni sistem tako, da je središče krožnice v izhodišču. Včrtajmo kvadrat in označimo oglišča, kot vidiš na sliki 3. Ordinata točke C je očitno dvakrat večja od njene abscise. Za točko C torej velja:

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ in } y = 2x$$

zato je

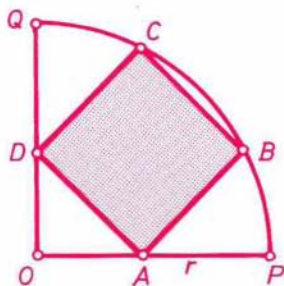
$$x^2 + 4x^2 = r^2$$

in od tod

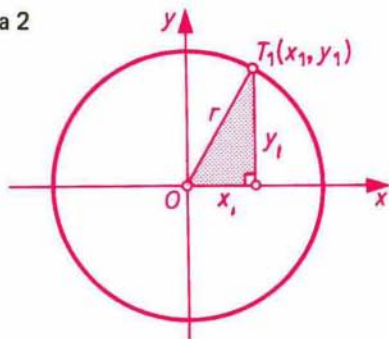
$$x = \frac{r\sqrt{5}}{5}$$

Izračunali smo absciso točk A in C , hkrati pa ordinato točk B in D . Nadaljnja konstrukcija poteka takole (slika 4):

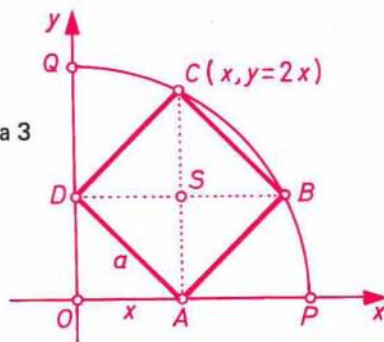
Slika 1



Slika 2



Slika 3



- $PR \perp OP, \overline{PR} = 2r$
- Pitagorov izrek:

$$\overline{OR} = \sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{PR}^2} = r\sqrt{5}$$
- S sorazmerjem določimo A' :

$$\overline{OA'} = r\sqrt{5}/5$$
- S šestilom prenesemo $\overline{OA'}$ na os x (dobimo A) in na os y (dobimo D).
- Na krožnici dobimo še točki B in C :
 $DB \parallel \text{os } x$ in $AC \parallel \text{os } y$

Naloga je končana. Saj res, izračunali bi lahko še ploščino!

Naslednja – druga naloga: Kolikšna je ploščina našega kvadrata, izražena s polmerom kroga?

Rešitev: Na sliki 3 vidimo, da je stranica kvadrata $a = \overline{AD}$ hkrati diagonala kvadrata $OASD$, ki ima stranico x . Torej je:

$$a = x\sqrt{2} = \frac{r\sqrt{5}}{5} \cdot \sqrt{2} = \frac{r\sqrt{10}}{5}$$

in ploščina:

$$\rho = a^2 = \left(\frac{r\sqrt{10}}{5}\right)^2 = \frac{r^2 \cdot 10}{25} = \frac{2r^2}{5}$$

Računanje ploščine (tista "petka" v imenovalcu) nas pripelje še do tretje naloge:

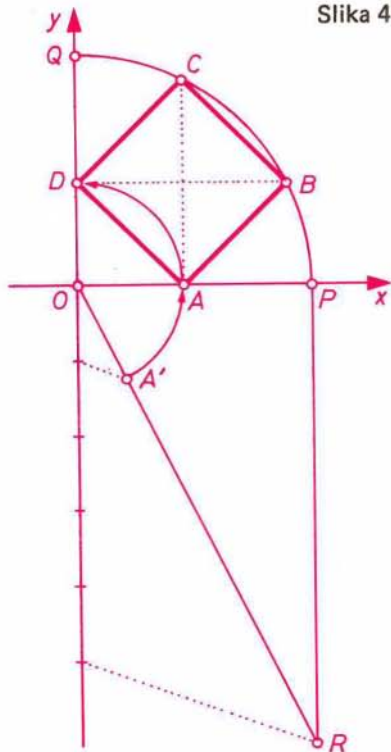
V krog včrtamo pet kvadratov (križ), kot kaže slika 5. Izračunaj ploščino tega križa.

Rešitev:

Nič posebnega! Križ je sestavljen iz petih prej obravnavanih kvadratov, zato ima ploščino:

$$\rho = 5a^2 = 5 \cdot \frac{2r^2}{5} = 2r^2$$

Slika 4



Slika 5

