PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **15** (1987/1988)
Številka 4
Strani 244–249

Marko Razpet:

ŠTEVILO RAZKOSANJ KONČNE MNOŽICE

Ključne besede: matematika, teorija števil, razkosanje množice, Stirlingova števila druge vrste, Bellova števila, rekurzivne formule.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/15/902-Razpet.pdf

ŠTEVILO RAZKOSANJ KONČNE MNOŽICE

V neki družini so štirje otroci: *Anton, Berta, Ciril* in *Darja*. Zelo radi se seveda igrajo. Nas pa zanima odgovor na vprašanje:

Na koliko različnih načinov se lahko igrajo po skupinah (tudi en sam otrok že sestavlja skupino)?

Med zavita oklepaja naštejmo, kateri otroci se lahko igrajo skupaj. Najpreprostejša je možnost, da se sploh ne razdelijo:

$$\{\,Anton, Berta, Ciril, Darja\,\}$$

Kar na sedem različnih načinov se lahko igrajo v dveh skupinah:

$\{\,Anton\,\}$	$\{\,Berta, Ciril, Darja\,\}$
$\{\,Berta\,\}$	$\{\,Anton, Ciril, Darja\,\}$
$\{\,Ciril\,\}$	$\{\,Anton, Berta, Darja\,\}$
$\{\,Darja\,\}$	$\{\,Anton, Berta, Ciril\,\}$
$\{\,Anton, Berta\,\}$	$\{\,Ciril, Darja\,\}$
$\{\,Anton, Ciril\,\}$	$\{\,Berta, Darja\,\}$
$\{\,Anton, Darja\,\}$	$\{\,Berta, Ciril\,\}$

Na tri skupine se lahko razdelijo na šest različnih načinov:

$\{\,Anton\,\}$	$\{\,Berta, Ciril\,\}$	$\{\,Darja\,\}$
$\{\,Anton\,\}$	$\{\,Berta, Darja\,\}$	$\{\,Ciril\,\}$
$\{\,Anton\,\}$	$\{\,Ciril, Darja\,\}$	$\{\,Berta\,\}$
$\{\,Ciril\,\}$	$\{\,Anton, Berta\,\}$	$\{\,Darja\,\}$
$\{\,Berta\,\}$	$\{\,Anton, Ciril\,\}$	$\{\,Darja\,\}$
$\{\,Berta\,\}$	$\{\,Anton, Darja\,\}$	$\{\,Ciril\,\}$

Štiri skupine s po enim otrokom so zadnja skrajna možnost za razdelitev:

$$\{\,Anton\,\} \qquad \{\,Berta\,\} \qquad \{\,Ciril\,\} \qquad \{\,Darja\,\}$$

Primer naših štirih otrok bomo sedaj posplošili na poljubne končne množice. V ta namen se moramo dogovoriti, kako in kaj naprej.

Rekli bomo:

Množici sta si tuji, če je njun presek prazna množica. Neprazne podmnožice $A_1, A_2, \ldots, A_m$ neprazne množice A tvorijo njeno razkosanje, če velja:

i) za poljubna različna indeksa i in j sta si množici A_i in A_j tuji

ii) unija množic $A_1, A_2, \ldots, A_m$ je množica A.

Ista množica A ima v splošnem več razkosanj na dano število podmnožic. Število različnih razkosanj dane množice seveda raste s številom njenih elementov. Naš cilj je naslednji:

Na koliko različnih načinov lahko množico A, ki šteje n elementov, razkosamo na m podmnožic?

Primer 1. *Andrej, Boris* in *Cene* so sicer dobri prijatelji, se pa vseeno pogosto prepirajo, pri tem pa kdo od njih potegne z drugim ali pa tudi ne. Glede na to, kdo je v prepiru s kom, so tele možnosti (našteti v zavitih oklepajih držijo skupaj):

1. V resnici se niso sporekli: {*Andrej, Boris, Cene*}
2. Dva proti enemu: {*Andrej, Boris*} {*Cene*}
   {*Andrej, Cene*} {*Boris*}
   {*Boris, Cene*} {*Andrej*}
3. Eden proti drugemu so na bojni nogi:
   {*Andrej*} {*Boris*} {*Cene*}

Bolj abstraktno povemo to takole:

Množico s tremi elementi lahko razkosamo na pet načinov na podmnožice, in sicer: na en način na eno podmnožico, na tri načine na dve podmnožici in na en način na tri podmnožice.

Bralec sam bo z lahkoto razkosal na podmnožice množico z enim samim elementom oziroma množico z dvema elementoma.

Število vseh razkosanj množice z n elementi na m podmnožic označimo s simbolom $S(n, m)$, število vseh razkosanj iste množice sploh pa s $T(n)$. Očitno velja zveza:

$$T(n) = S(n, 1) + S(n, 2) + \dots + S(n, n) \qquad (1)$$

Vsota se neha pri $S(n, n)$, ker je $S(n, m) = 0$ za $m > n$. Hitro se vidi, da je $S(n, 1) = 1$ in $S(n, n) = 1$.

Primer 2. Iz primera 1 razberemo: $S(1, 1) = 1$, $S(2, 1) = 1$, $S(2, 2) = 1$, $S(3, 1) = 1$, $S(3, 2) = 3$, $S(3, 3) = 1$, $T(1) = 1$, $T(2) = 2$, $T(3) = 5$.

Z računskega stališča bo najvažnejša povezava med števili $S(n, m)$, to je *rekurzivna formula.* Števila $S(n, m)$ se v matematični literaturi imenujejo *Stirlingova števila druge vrste,* števila $T(n)$ pa *Bellova števila.* Obstajajo tudi Stirlingova števila prve vrste, ki pa jih tu ne bomo obravnavali. Dokažimo

izrek 1. Stirlingova števila $S(n, m)$ povezuje rekurzivna formula:

$$S(n+1, m) = m\,S(n, m) + S(n, m-1), \quad m \geq 2 \qquad (2)$$

Dokaz. Naj ima množica B n elementov, množica A pa enega več, recimo a_0. Množico A razkosamo v dveh korakih na m podmnožic. Najprej razkosamo množico B na m podmnožic, kar je mogoče narediti na $S(n, m)$ načinov po shemi

$$\left.\begin{array}{l} \overbrace{\{\ \},\{\ \},\ldots\ \{\ \}}^{m} \\ \{\ \},\{\ \},\ldots\ \{\ \} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \{\ \},\{\ \},\ldots\ \{\ \} \end{array}\right\} S(n, m)$$

Vsaki od teh podmnožic, ki so na shemi označene kar z zavitimi oklepaji, dodamo element a_0. Na ta način dobimo $m\ S(n, m)$ razkosanj množice A na m podmnožic. S tem nismo dobili še vseh razkosanj množice A na m podmnožic. Manjkajo še tista, pri katerih je ena od nastopajočih podmnožic $\{a_0\}$. Do teh razkosanj pridemo tako, da razkosamo množico B na $m-1$ podmnožic, kar lahko naredimo na $S(n, m-1)$ načinov po shemi

$$\left.\begin{array}{l} \overbrace{\{\ \},\ \{\ \},\ldots\{\ \}}^{m-1};\ \{\ \} \\ \{\ \},\ \{\ \},\ldots\{\ \};\ \{\ \} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \{\ \},\ \{\ \},\ldots\{\ \};\ \{\ \} \end{array}\right\} S(n, m-1)$$

V zavite oklepaje za podpičji vstavimo element a_0. S tem smo dobili še preostala razkosanja množice A na m podmnožic, torej $S(n+1, m) = m\ S(n, m) + S(n, m-1)$.

Zaradi rekurzivne formule, ki smo jo pravkar dokazali, lahko števila $S(n, m)$ razvrstimo v trikotnik, ki ga bomo imenovali Stirlingov trikotnik druge vrste. V prvem stolpcu in na hipotenuzi tega trikotnika so same enice, ostala števila pa tvorimo po shemi:

$$S(n, m-1) + S(n, m) . m = S(n+1, m)$$

Začetek tega neskončnega trikotnika, kateremu dodamo še Bellova števila, je takle:

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	$T(n)$
1	1							1
2	1	1						2
3	1	3	1					5
4	1	7	6	1				15
5	1	15	25	10	1			52
6	1	31	90	65	15	1		203
7	1	63	301	350	140	21	1	877

Stirlingova števila druge vrste $S(n, m)$ in Bellova števila $T(n)$

V nadaljevanju bomo posegli še po Pascalovem trikotniku, o katerem je bilo v Preseku že precej napisanega. Če ga zapišemo v prejšnjem stilu, dobimo:

n \ m	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Pascalov trikotnik

Števila v Pascalovem trikotniku se imenujejo binomski koeficienti, ker se pojavljajo kot koeficienti v razvoju n–te potence binoma. Na križišču n–te vrstice in m–tega stolpca v Pascalovem trikotniku je binomski koeficient, ki ga označujemo s simbolom $\binom{n}{m}$ in beremo "n nad m". Osnovni lastnosti binomskih koeficientov sta lastnosti simetričnosti in Pascalova identiteta:

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}, \quad \binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m} \tag{3}$$

Morda je bralec že opazil, da na prvi vzporednici hipotenuze v Stirlingovem trikotniku druge vrste ležijo *trikotniška števila,* o katerih je v Preseku tudi že bilo precej napisanega. Dokažimo

trditev 1. Števila na prvi vzporednici hipotenuze v Stirlingovem trikotniku druge vrste so trikotniška števila, dana s formulo

$$S(n, n-1) = \binom{n}{2} \tag{4}$$

za $n = 2, 3, 4, \dots$.

Dokaz. Formulo (4) dokažemo preprosto s popolno indukcijo. Za $n = 2$ je $S(2, 1) = 1$ in

$\binom{2}{2} = 1$, torej formula drži. Sedaj je na vrsti indukcijski korak. Privzemimo, da (4) drži za neko naravno število $n > 2$. Po formuli (2) dobimo:

$$S(n+1, n) = n\,S(n, n) + S(n, n-1) = n + \binom{n}{2} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$$

Pascalova identiteta nam da končno

$$S(n+1, n) = \binom{n+1}{2}$$

kar je trditev (4) za število $n + 1$. Po principu popolne indukcije velja (4) za vsa naravna števila, večja od 2.

Naloga 1. Na podoben način dokažite, da so števila na drugi vzporednici hipotenuze v Stirlingovem trikotniku druge vrste dana s formulo

$$S(n, n-2) = \binom{n}{3} + 3\binom{n}{4} \tag{5}$$

za $n = 3, 4, 5, \dots$.

Naloga 2. Z nastavkom

$$S(n, n-3) = a\binom{n}{4} + b\binom{n}{5} + c\binom{n}{6}$$

za $n = 4, 5, 6, \dots$ poskusite najte formulo za števila na tretji vzporednici hipotenuze v Stirlingovem trikotniku druge vrste.

Na vprašanje, kako se izražajo števila $S(n, m)$ v zaključeni obliki, odgovorimo brez dokaza:

$$m!S(n, m) = m^n - \binom{m}{1}(m-1)^n + \binom{m}{2}(m-2)^n + \dots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m-1} \tag{6}$$

Zanimivo je morda v zvezi s tem še tole: število $m!S(n, m)$ je število vseh surjektivnih funkcij iz množice z n elementi na množico z m elementi.

Bellova števila $T(n)$ se izražajo še bolj komplicirano, z neskončno vrsto in s številom e ($e = 2{,}71828..$):

$$eT(n) = 1^n/1! + 2^n/2! + 3^n/3! + \dots \tag{7}$$

Pač pa lahko iz že znanih števil $T(1)$, $T(2)$, $T(3)$, ..., $T(n)$ izračunamo naslednje število $T(n + 1)$ po formuli:

$$T(n+1) = 1 + \binom{n}{1}T(1) + \binom{n}{2}T(2) + \dots + \binom{n}{n}T(n) \tag{8}$$

Aitken je na podlagi te formule in Pascalove identitete ugotovil, da Bellova števila $T(n)$ lahko izračunamo tudi s pomočjo trikotnika števil:

1				
1	2			
2	3	5		
5	7	10	15	
15	20	27	37	52
52	....	....	....	....