TEŽA V JAŠKU

Iz gravitacijskega zakona razberemo, da pojema teža telesa obratno sorazmerno s kvadratom razdalje od središča Zemlje, ko se telo oddaljuje od površja Zemlje:

$$F = \kappa m m_z / r^2 = F_0 r_z^{\,2} / r^2$$

Pri tem je $F_0 = \kappa m m_z / r_z^{\,2} = mg$ teža in $g = \kappa m_z / r_z^{\,2}$ pospešek prostega padanja na površju Zemlje. Kako pa pojema teža telesa, ko se telo spušča pod površje Zemlje v navpični jašek? Krogelna lupina ne izvaja gravitacijske sile na telo v svoji notranjosti. Že na prvi pogled uvidimo, da se sile vseh delov krogelne lupine na drobno telo v njenem središču izravnajo. Nekoliko teže je uvideti, da velja to tudi v drugih točkah v notranjosti lupine (slika 1). V krogelno simetričnem telesu, ki si ga lahko mislimo sestavljenega iz samih tankih lupin, zato vsi deli, ki so bolj oddaljeni od središča kot drobno telo, na drobno telo ne izvajajo gravitacije. Gravitacijo izvajajo samo deli, ki so bliže središču kot drobno telo. Te dele pa lahko glede gravitacije nadomestimo z drobnim telesom z enako maso v središču.

Na telo v notranjosti Zemlje v razdalji r od središča deluje potemtakem le krogla z radijem r in maso $m(r)$:

$$F = \kappa\, m m(r)/r^2 = \kappa m \rho . 4\pi r^3 / 3r^2 = 4\pi\kappa \rho m r/3 = \kappa m m_z r / r_z^{\,3}$$

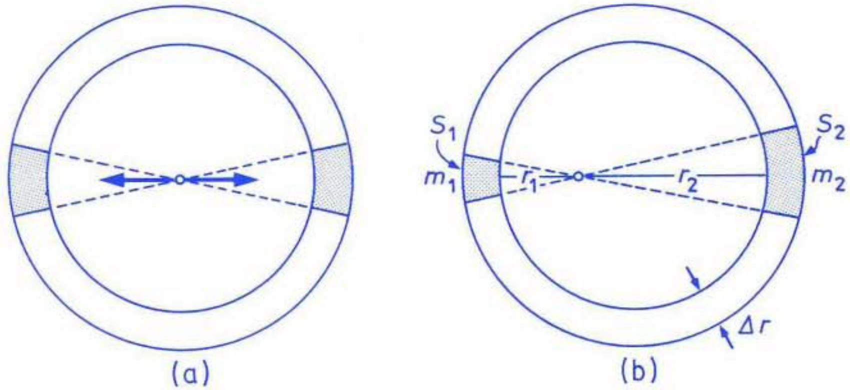
Teža telesa v notranjosti Zemlje torej narašča sorazmerno z odmikom od središča (slika 2). Zadnje tri korake lahko naredimo le, če se zadovljimo s približkom, da je gostota po vsej zemeljski krogli konstantna:

$$\rho = m_z / V = 3 m_z / 4\pi r_z^{\,3}$$

Ali ni to podobno kot pri vijačni vzmeti: vzmet deluje na telo proti ravnovesni legi s silo, ki je sorazmerna z odmikom? Telo na vijačni vzmeti sinusno niha, če ga izmaknemo iz ravnovesne lege in spustimo, z nihajnim časom $t_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$. Pri tem je m masa telesa in k koeficient, ki pove, za koliko newtonov naraste sila, ko se poveča odmik za 1 meter. Po tem zgledu lahko

Vrsto krajših prispevkov v tej in v prejšnji številki je J. Strnad napisal kot del sestavka "Do Newtonovih zakonov", a zaradi omejenega prostora niso mogli iziti v 7. številki prejšnjega letnika.

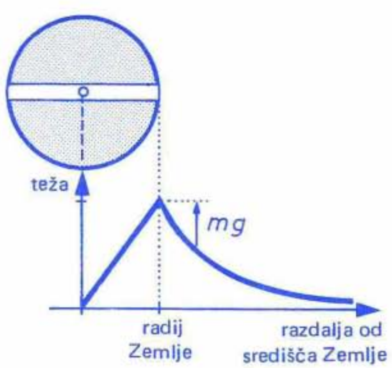
Slika 1. Sila na drobno telo z maso m v tanki krogelni lupini. Na telo v središču ne deluje nobena sila, saj se prispevki vse lupine izravnajo; nasprotna odseka lupine namreč delujeta na telo z nasprotno enakima silama (a). To velja tudi, če telo ni v središču. Sila levega odseka je sorazmerna z m_1/r_1^2, sila desnega pa z m_2/r_2^2. Ta kvocienta sta enaka, kot sledi iz $S_1/S_2 = r_1^2/r_2^2$ ter $m_1 = \rho S_1 \Delta r$ in $m_2 = \rho S_2 \Delta r$. Drobno telo je v razdalji r_1 od prvega in r_2 od drugega odseka, Δr pa je debelina lupine.



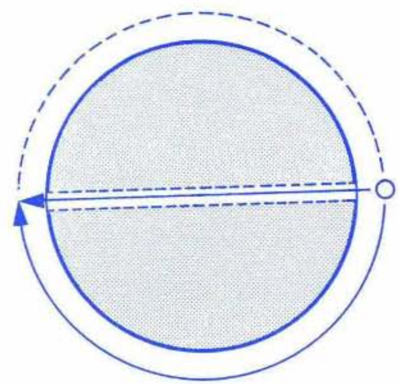
takoj zapišemo nihajni čas, s katerim niha okoli zemeljskega središča telo po navpičnem jašku:

$$t_0 = 2\pi\sqrt{r_z/g}$$

Za koeficient smo vstavili $k = F/r = \kappa\, mm_z/r_z^3$ in upoštevali pospešek prostega



Slika 2. Teža v jašku in nad površjem Zemlje v odvisnosti od razdalje od središča za primer, da bi imeli vsi deli Zemlje enako gostoto.

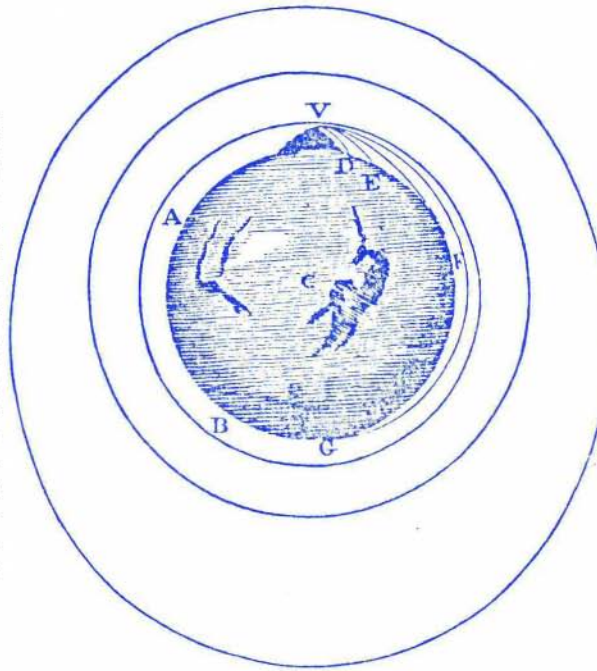


Slika 3. Umetni satelit, ki bi krožil okoli Zemlje v majhni višini, bi potreboval do nasprotne točke enak čas kot telo, ki bi padlo mimo središča Zemlje.

pada na površju Zemlje $g = \kappa\ m_z/r_z^2$. Nihajni čas ni odvisen od amplitude.

Polovico tega časa, to je $\frac{1}{2}\ t_0 = \pi\sqrt{r_z/g} = 42$ minut, bi potrebovalo telo, da bi po navpičnem jašku skozi središče s površja Zemlje doseglo nasprotno točko na površju. V prav tolikšnem času bi priletel iz prve točke v drugo umetni zemeljski satelit, ki bi krožil okoli Zemlje v majhni višini (slika 3). Pri tem odmislimo zračni upor. V tem primeru je namreč gravitacijska sila ravno centripetalna sila: $\kappa\ mm_z/r_z^2 = mv^2/r_z = m(2\pi r_z/t_0)^2/r_z$ (slika 4). Za hitrost satelita smo vstavili $v = 2\pi r_z/t_0$.

Slika 4. Newtonova risba poti izstrelka, ki ga z vse večjo hitrostjo izstreljujemo v vodoravni smeri. Ko se ujemata centripetalna sila mv^2/r in teža $mg = \kappa mm_z/r^2$, postane izstrelek umetni satelit. Tedaj velja $v = \sqrt{rg} = \sqrt{\kappa m_z/r}$, če je r radij Zemlje. Umetni satelit se mora gibati vsaj v višini okoli 100 kilometrov. Toda to ne vpliva znatno na rezultat, saj se 100 kilometrov komaj pozna v 6400 km.



ALI MORDA GRAVITACIJSKA KONSTANTA POJEMA S ČASOM?

Angleški fizik P.A.M. Dirac je leta 1937 primerjal kvociente nekaterih fizikalnih količin, ki so gola števila in niso odvisna od izbire enot. Kvocient električne in gravitacijske privlačne sile med elektronom in jedrom vodikovega atoma je

$$(\kappa_e e_0^2/r^2):(\kappa\, m_e m_p/r^2) = \kappa_e e_0^2/\kappa\, m_e m_p = 2{,}3.10^{39}$$

Pri tem je $e_0 = 1{,}6.10^{-19}$ As osnovni naboj, $\kappa_e = 0{,}9.10^9$ Vm/As konstanta, ki v Coulombovem zakonu ustreza gravitacijski konstanti in ki se z influenčno konstanto $\epsilon_0 = 8{,}9.10^{-12}$ As/Vm izraža takole: $\kappa_e = 1/4\pi\epsilon_0$, $m_e = 9{,}1.10^{-31}$ kg masa elektrona in m_p 1839–krat večja masa vodikovega jedra.

Kvocient časa razširjanja vesolja t_0 in za atomski svet značilnega časa $t_a = \hbar/m_e c^2 = 1{,}3.10^{-21}$ s je

$$t_0/t_a = 18.10^9.3{,}15.10^7 \text{ s}/1{,}3.10^{-21} \text{ s} = 4{,}2.10^{38}$$

Za čas razširjanja vesolja vzamemo 18 milijard let. Za atomski svet značilni čas sestavimo iz konstante $\hbar = 1{,}05.10^{-34}$ Js (to je z 2π deljena Planckova konstanta h), mase elektrona m_e in hitrosti svetlobe $c = 3.10^8$ m/s.

Dirac je trdil, da obe zelo veliki števili nista po naključju približno enaki, ampak da se za tem skriva še neznani zakon narave. Ni treba, da bi bili obe števili natančno enaki; podrobnejša teorija bi namreč lahko prinesla še kak številski faktor, na primer 2π, ki bi naredil kvocient enak 1.

Ker starost vesolja s časom narašča, bi se morala s časom spreminjati vsaj še ena izmed nastopajočih osnovnih "konstant", da bi kvocient ostal ves čas enak 1. Če bi bila to samo gravitacijska konstanta, bi morala pojemati obratno sorazmerno s starostjo vesolja. Iz zahteve v obliki

$$\kappa(t) = \kappa(t_0)t_0/t$$

sledi

$$[\kappa(t) - \kappa(t_0)]/\kappa(t_0)(t - t_0) = -1/t_0 = -6.10^{-11} \text{ leto}^{-1}$$

če vstavimo na desni strani $t = t_0 = 18$ milijard let. Gravitacijska konstanta bi se morala relativno zmanjšati za 6.10^{-11} na leto.

Po dolgoletnem zasledovanju gibanja planetov z radarjem so ugotovili, da se gravitacijska konstanta ne spreminja tako izdatno, če se sploh spreminja. Toda nekateri trdijo, da to še nič ne pomeni. Obhodni čas Lune se namreč podaljša relativno za 22.10^{-11} na leto in samo okoli 16.10^{-11} na leto je mogoče pojasniti z zaviranjem Lune zaradi plime na Zemlji. Preostalih 6.10^{-11} na leto naj bi pojasnilo zmanjšanje gravitacijske konstante.

Za sicer zanimivo, a drzno Diracovo sklepanje večina fizikov misli, da nima zadostne eksperimentalne opore. Tu in tam se sicer na prvi pogled zazdi, da je mogoče z njim pojasniti kako odprto vprašanje, a v celoti povzroči več težav, kot razreši odprtih vprašanj.

ALI NEWTONOV GRAVITACIJSKI ZAKON NATANČNO VELJA?

Na mejo veljavnosti Newtonovega gravitacijskega zakona pomislimo najprej v zvezi z Einsteinovo splošno teorijo relativnosti. Pri zelo natančnih merjenjih v Osončju in v modelih vesolja na zgodnji razvojni stopnji in zelo gostih zvezd je treba upoštevati to podrobnejšo teorijo gravitacije. O tem pričajo izidi merjenj, ki se ujemajo z njenimi napovedmi. O veljavnosti Newtonovega gravitacijskega zakona pa razmišljajo še v drugi zvezi. Nekateri fiziki kritično preverjajo temeljne ugotovitve, čeprav pri tem ni veliko upanja, da bi dognali kaj pomembnega. Tako so si postavili tudi vprašanje, ali Newtonov gravitacijski zakon natančno velja. Drugače povedano: s kolikšno natančnostjo nas prepričajo merjenja, da velja?

Kaj pa, če velja gravitacijski zakon v drugačni obliki? Zadnje čase je oživela razprava o zakonu v obliki

$$F = (\kappa\, mm'/r^2)(1 + \alpha e^{-r/b}(1 + r/b))$$

V dodatnem faktorju naj bi bil α = 0,007 majhen številski koeficient in b = 200 metrov. Dodatni faktor je vreden upoštevanja, dokler razdalja r med telesom ne doseže nekajkratne vrednosti b. Gravitacijska sila bi bila pri majhni razdalji malo manjša kot po Newtonovem gravitacijskem zakonu, na vesoljskih razdaljah pa dodatek ne bi bil vreden upoštevanja. Lahko bi tudi rekli, da je gravitacijska konstanta pri laboratorijskih merjenjih malo manjša kot v vesolju.

Razprava še ni končana, ker čakajo na izide merjenj.

ALI JE OSONČJE STABILNO?

Okoli Sonca se giblje devet planetov in veliko manjših teles. Gravitacijska sila deluje med vsakim parom teles. Tako se vsili vprašanje o stabilnosti Osončja. Ali se bodo planeti gibali v nedogled, kot so se gibali od zdavnaj in kot se gibljejo dandanes? Pri tem se ne menimo za morebitno zunanjo motnjo, denimo za to, da bi se Soncu približala kaka zvezda, ali za to, da se bo Sonce v poznejšem obdobju razvoja napihnilo in morda zajelo tudi tir katerega izmed planetov.

Vprašanje sodi pravzaprav v matematiko. Poleg privlačne sile Sonca delujejo na vsak planet sile drugih planetov kot majhne motnje. Zadostuje, da poznamo Newtonov gravitacijski zakon in lego planetov in njihovo hitrost v danem trenutku. Toda razmere se ne ponavljajo natančno, zato je vprašanje zelo trd oreh.

Okoli leta 1800 so francoski mehaniki P.S. Laplace, J.L. Lagrange in

S.D. Poisson mislili, da so dokazali stabilnost Osončja. Toda v njihovih dokazih so pozneje odkrili vrzeli. Razprave o tem niso pojenjale, zato je švedski kralj razpisal nagradno nalogo. Nagrado je dobil leta 1889 francoski matematik in fizik Henri Poincaré. Ugotovil je, da stabilnost Osončja ni mogoče dokazati. Po zelo dolgem času lahko zelo majhna ponavljajoča se motnja povzroči izdatne spremembe, če so vpletena tri telesa ali več.

Toda tudi Poincaréjevi dokazi niso bili neoporečni. Leta 1962 sta jih dopolnila matematika V.I. Arnold iz Moskve in J. Moser, ki je tedaj delal v Göttingenu, a Poincaréjev sklep je ostal v veljavi.

Praznoverneži opozarjajo na to, da si v mehaniki pomembna temeljna odkritja sledijo na 101 leto, in napovedujejo za leto 1990 – bolj za šalo kot zares – tako odkritje.

1687 I. Newton, *Principia mathematica philosophiae naturalis*
1788 J.L. Lagrange, *Mécanique analitique* (Analitična mehanika)
1889 H. Poincaré, *Sur le probleme des trois corps et les equations de la dynamique* (O problemu treh teles in enačbah gibanja)
1990 ? ?

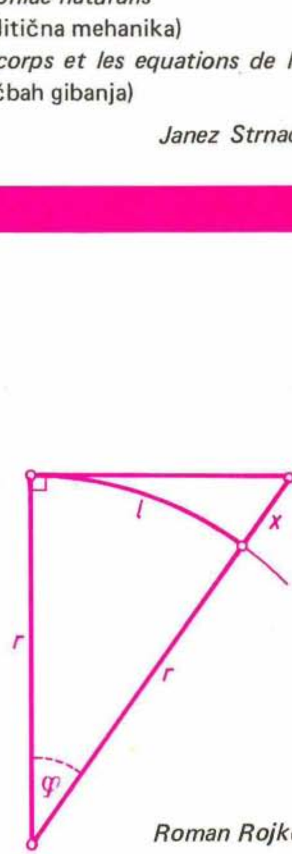
Janez Strnad

JAMBOR – Rešitev iz P–2

Krožni lok dobimo z: $l = \pi r \varphi/180$, torej: $\varphi = 180\, l/\pi r$. Po definiciji dobimo: $\cos\varphi = r/(r + x)$, torej $x = r/\cos\varphi - r$. Vstavimo vrednosti: l = 120 km in r = 6400 km, pa dobimo: x = 1125 m.

Napačen rezultat dobimo, če ne upoštevamo pravilnih kotnih enot. Računalniki običajno delajo z radiani, nekaterim lahko z BASICovim ukazom DEG naročimo, naj delajo s stopinjami. Zgornje formule merijo kot v stopinjah.

Če želimo meriti kote v radianih, zamenjamo formulo za krožni lok z: $l = \varphi r$, torej: $\varphi = l/r$, naprej pa računamo enako.



Roman Rojko