PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **15** (1987/1988)
Številka 2
Strani 104–111

Anton Suhadolc:

MATRIKE KOT POSPLOŠITEV POJMA ŠTEVILA, II. DEL

Ključne besede: matematika, linearna algebra, matrike, matrične enačbe.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/15/874-Suhadolc.pdf

MATRIKE KOT POSPLOŠITEV POJMA ŠTEVILA 2. del *

Doslej smo spoznali, da ima matrično množenje podobne lastnosti kot množenje števil, le komutativnost nasploh ne velja. Oglejmo si nekaj pojavov, ki jih pri številih ne srečamo. Izračunajmo npr. produkt matrik A in B, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Dobimo $A \,.\, B = O$. Imamo torej dve matriki A in B, obe sta različni od matrike O, njun produkt pa je enak O. Pri številih se kaj takega ne more primeriti. Če sta a in b od 0 različni števili, potem je tudi ab različen od 0. Matriki A in B iz zgornjega primera imenujemo *delitelja niča.* Točneje, A je levi, B pa desni delitelj niča.

Zastavimo si nalogo: poišči vse matrike X z lastnostjo $A \,.\, X = O$, kjer je A matrika iz zgornjega primera. Rešiti je torej treba matrično enačbo $A \,.\, X = O$, ali na dolgo:

$$A \,.\, X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \,.\, \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + z & 2y + u \\ 4x + 2z & 4y + 2u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

Spet dobimo sistem štirih linearnih enačb:

$$2x + z = 0 \qquad 4x + 2z = 0 \qquad 2y + u = 0 \qquad 4y + 2u = 0$$

Druga in četrta enačba sta le mnogokratniki prve oziroma tretje enačbe, zato je rešitev tega sistema kar $z = -2x$ in $u = -2y$, kjer sta x in y poljubni števili. Spet smo dobili neskončno mnogo rešitev, matrik X, ki so desni delitelji niča za dano matriko A:

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ -2x & -2y \end{bmatrix} \qquad x, y \text{ poljubna}$$

V zgornjem primeru smo imeli $A \,.\, B = O$. Zanimivo je, da $B \,.\, A$ ni enako O

---

* 1. del tega članka je izšel v P XV/1, str. 2 – 7

$$B.A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -5 \\ 20 & 10 \end{bmatrix}$$

Ta rezultat nas pouči, da matrika A, ki je levi delitelj niča za matriko B, ni nujno tudi desni delitelj niča za isto matriko B.

Naravno se nam zdi vprašanje, ali je vsaka matrika desni ali levi delitelj niča. Odgovor je ne. Matrika A je, kot pokaže nekaj daljši račun, desni delitelj niča natanko tedaj, ko je izpoljnen pogoj $ad - bc = 0$, kjer so a, b, c, d matrični elementi matrike A.

Končno se še vprašajmo, ali je kaka matrika A sama sebi delitelj niča, ali velja torej $A \neq O, A \,.\, A = O$? Rešiti je torej treba matrično enačbo $A^2 = O$. Tako matriko imenujemo *nilpotentna matrika.* Pri številih ima seveda enačba $a^2 = 0$ samo nezanimivo rešitev $a = 0$. Pri matrikah ni tako. Izračunajmo najprej A^2:

$$A^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Iz enačbe $A^2 = O$ sledijo štiri kvadratne enačbe:

$$\begin{gathered} a^2 + bc = 0 \\ d^2 + bc = 0 \\ (a + d)\, b = 0 \\ (a + d)\, c = 0 \end{gathered}$$

Pri reševanju kvadratnih enačb moramo biti previdni, da se nam kaka rešitev ne izmuzne. Sistematično bomo upoštevali vse možnosti.

1. Naj bo $a + d \neq 0$. Potem sledi iz tretje enačbe, da mora biti $b = 0$, iz četrte pa $c = 0$. Prva enačba postane tako $a^2 = 0$, torej $a = 0$, druga pa je $d^2 = 0$ ali $d = 0$. Sedaj pa predpostavka $a + d \neq 0$ ni več izpolnjena. Ta možnost nam ne da nobene rešitve.

2. Naj bo torej $a + d = 0$. Zadnji dve enačbi sta sedaj izpolnjeni pri poljubnih vrednostih neznank c in d. Iz $d = -a$ in iz druge enačbe sledi $a^2 + bc = 0$, kar je prva enačba. Ostala nam je tako le še prva enačba $a^2 + bc = 0$. Če vzamemo $b = c = 0$, dobimo $a = 0$, zaradi $a + d = 0$ pa tudi $d = 0$, kar nam da rešitev $A = 0$.

Pa si izberimo $c \neq 0$. Tedaj smemo prvo enačbo deliti s c in dobimo

$b = -a^2/c$. Iz pogoja $a + d = 0$ sledi seveda $d = -a$, števili c in a pa sta poljubni, le c ne sme biti 0. Dobili smo neskončno mnogo rešitev enačbe $A^2 = 0$:

$$A = \begin{bmatrix} a & -a^2/c \\ c & -a \end{bmatrix} \qquad a \text{ in } c \text{ poljubna}, c \neq 0$$

Če pa vzamemo $c = 0$, sledi iz prve enačbe $a = 0$, zaradi pogoja $a + d = 0$ mora biti tudi $d = 0$, b pa je poljuben. Dobili smo še rešitve:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad b \text{ poljuben}$$

Če vzamemo sedaj $b = 1$, v prejšnji rešitvi pa $a = 0$, $c = 1$, dobimo posebno enostavni rešitvi enačbe $A^2 = 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pri številih rešujemo tudi druge kvadratne enačbe. Npr. enačba $a^2 = a$ ima rešitvi $a = 0$ in $a = 1$. Vprašajmo se, kako je z rešitvami ustrezne matrične enačbe $A^2 = A$. Matrikam s tako lastnostjo pravimo *idempotentne matrike.* Po analogiji s številsko enačbo $a^2 = a$ sklepamo, da ima ustrezna matrična enačba gotovo rešitvi $A = O$ in $A = I$, kar je očitno res. Izračunajmo še druge rešitve enačbe $A^2 = A$. Iz enačbe (10) in pogoja $A^2 = A$ sledijo spet štiri kvadratne enačbe:

$$\begin{aligned} a^2 + bc &= a \\ c(a + d) &= c \\ b(a + d) &= b \\ bc + d^2 &= d \end{aligned}$$

Razlikovati je treba več možnosti.

1. Naj bo $a + d = 0$. Tedaj sledi iz druge enačbe $c = 0$, iz tretje pa $b = 0$. Iz prve dobimo $a^2 = a$. Iz $a + d = 0$ sledi $d = -a$. To vstavimo v četrto enačbo in dobimo $a^2 = -a$. Iz enačb $a^2 = a$ in $a^2 = -a$ sledi $2a = 0$, torej $a = 0$, zato tudi $d = 0$. Dobili smo že znano rešitev $A = 0$.

2. Naj bo sedaj $a + d \neq 0$, $b = 0$ in $c = 0$. Prva enačba pove sedaj $a^2 = a$,

druga in tretja postaneta $0 = 0$, četrta pa $d^2 = d$. Tako dobimo možnosti $a = 0$ ali $a = 1$ in $d = 0$ ali $d = 1$. To nam da štiri rešitve:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Prvi dve rešitvi smo že uganili, drugi dve sta novi.

3. Naj bo spet $a + d \neq 0$ *in* $b \neq 0$. Sedaj lahko tretjo enačbo krajšamo z b in dobimo $a + d = 1$. Druga enačba postane $c = c$, ki je izpolnjena seveda za vsak c. Iz $a + d = 1$ izrazimo $d = 1 - a$ in to vstavimo v četrto enačbo. Dobimo $bc + (1 - a)^2 = 1 - a$ ali, po ureditvi, $bc + a^2 = a$, kar je prav prva enčba. Ker smo predpostavili $b \neq 0$, lahko iz prve enačbe izrazimo $c : c = (a - a^2)/b$, a in b sta še poljubna, le b ne sme biti enak 0. Tako smo dobili neskončno mnogo novih rešitev enačbe $A^2 = A$:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ (a - a^2)/b & 1 - a \end{bmatrix}$$

4. Zadnja možnost je $a + d \neq 0$, $b = 0$, $c \neq 0$. Sedaj spet sledi iz druge enačbe $a + d = 1$, tretja postane $0 = 0$, prva pa $a^2 = a$. V četrti enačbi upoštevamo $d = 1 - a$ in dobimo $a^2 = a$. Rešitve so tako $a = 0, d = 1$ ali $a = 1, d = 0$, c pa je poljuben. Dobili smo še neskončno mnogo novih rešitev enačbe $A^2 = A$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} \qquad c \text{ poljuben}$$

Med drugim smo spoznali tudi: v številih ima kvadratna enačba $a^2 = a$ dve rešitvi, ustrezna matrična enačba pa ima neskončno mnogo različnih rešitev.

Med realnimi števili kvadratna enačba $a^2 = -1$ seveda nima rešitve. Lahko pa se seveda vprašamo, ali ima ustrezna matrična enčba

$$A^2 = -I$$

rešitve, matrike, ki imajo realne matrične elemente. Odgovor je spet da. Zgornja matrična enačba prevede do sistema štirih kvadratnih enačb:

$$a^2 + bc = -1 \qquad (a + d)\, b = 0 \qquad (a + d)\, c = 0 \qquad d^2 + bc = -1$$

Podobno, kot smo reševali sisteme kvadratnih enačb doslej, lahko rešimo tudi ta sistem. Naj bralec poskusi sam! Dobi se rešitev:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ (-1-a^2)/b & -a \end{bmatrix} \qquad a, b \text{ poljubna, } b \neq 0$$

Posebno preprosto rešitev dobimo v primeru $a = 0$, $b = 1$. Dobljeno matriko označimo z J:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad J^2 = -I$$

Tisti, ki že poznate kompleksna števila, opazite, da ima matrika J prav tako lastnost kot imaginarno število i: $i^2 = -1$.

Doslej smo spoznali, da lahko z matrikami pogosto računamo podobno kot s števili. Spoznali pa smo tudi pojave, ki jih pri številih ne srečamo. Pri številih lahko govorimo tudi o deljenju. Če je $b \neq 0$, lahko poljubno število a delimo z b. Dobimo a/b. Pravzaprav je deljenje odveč, saj lahko zapišemo: $\frac{a}{b} = a.\frac{1}{b}$. Zadošča, da za vsako število $b \neq 0$ poznamo njemu recipročno število $\frac{1}{b}$. Deljenje je potem množenje z recipročno vrednostjo. Za $b \neq 0$ je x recipročno število, če velja $b.x = 1$. V tej obliki pa lahko posplošimo pojem recipročnega števila na matrike. Dana naj bo matrika A. Rekli bomo, da je matrika X *inverzna* k A, če je izpolnjena enačba:

$$A.X = I \tag{11}$$

Če taka matrika X obstaja, jo bomo označili z A^{-1}, matriko A pa bomo imenovali *obrnljivo.*

Naravno je seveda vprašanje, ali ima vsaka od O različna matrika inverzno matriko. Pokažimo, da to ni res. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Poglejmo, če ima za ta A enačba (11) rešitev. Izračunajmo

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & u \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kakorkoli izberemo števila x, y, z in u, nikoli ne bomo dobili na desni strani zgornje enačbe matriko I. To pomeni, da matrika A nima inverzne matrike, čeprav je različna od matrike O.

Za mnoge matrike hitro vidimo, da imajo inverzno matriko. Matrika I je npr. sama sebi inverzna, saj velja $I \cdot I = I$. Tudi matrika J ima inverzno matriko. Zaradi enačbe $J^2 = -I$ je $-J$ inverzna k J.

Naloga: Poišči vse matrike, ki so same sebi inverzne.

Poskusimo ugotoviti, katere matrike imajo inverz. Za dano matriko A mora torej veljati enačba (11), ali na dolgo:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Primerjava levih in desnih strani v tej enačbi nam da sistem štirih linearnih enačb:

$$\begin{aligned} ax + bz &= 1 \qquad & ay + bu &= 0 \\ cx + dz &= 0 \qquad & cy + du &= 1 \end{aligned} \tag{12}$$

To sta pravzaprav dva ločena sistema dveh enačb za dve neznanki. Rešimo prvi sistem (pri začasnem privzetku, da je $d \neq 0$ in $b \neq 0$). Prvo enačbo pomnožimo z d, drugo z $-b$ in seštejemo dobljeni enačbi:

$$(ad - bc)\, x = d$$

Od tu lahko x izračunamo, če je le $ad - bc \neq 0$. Privzemimo, da je tudi ta pogoj izpolnjen. Tako dobimo $x = d/(ad - bc)$. Podoben račun nam da $z = -c/(ad - bc)$. Drugi sistem rešimo po podobni poti in dobimo $y = -b/(ad - bc)$, $u = a/(ad - bc)$. Za X smo dobili torej matriko

$$X = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{13}$$

Preskus pokaže, da je res $AX = I$. Izračunajmo še $X \,.\, A$:

$$X.A = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = I$$

Opazimo še, da je s formulo (12) vedno določena neka matrika, če je le izraz $ad - bc \neq 0$. Tako smo dokazali izrek:

Če je za matriko A izraz $ad - bc$ različen od 0, potem obstaja k matriki A inverzna matrika. Dana je s formulo (13).

Izraz $ad - bc$ imenujemo *determinanta* matrike A. Ostane seveda vprašanje, kako je z inverzom v primeru, ko je determinanta enaka 0.

Oglejmo si primer, ko sta b in d različna od 0, $ad - bc = 0$. Prvo enačbo v (12) $ax + bz = 1$, pomnožimo na obeh straneh z d. Dobimo $adx + bdz = d$. Ker je $ad - bc = 0$, je $ad = bc$. To upoštevajmo v zadnji enačbi in dobimo $bcx + bdz = d$. Po delitvi z b pa dobimo

$$cx + dz = d/b$$

Druga enačba v sistemu (12) pa je $cx + dz = 0$. Ker sta d in b različna od 0, sta dobljeni enačbi protislovni in sistem nima rešitve, matrika A, za katero je $ad - bc = 0$, pa nima inverzne matrike.

Zgoraj smo obravnavali primer $ad - bc = 0$, b in d različna od 0. Za vse ostale možnosti: $b = 0, d = 0$ in $b = 0, d \neq 0$ in $b \neq 0, d = 0$ bi prišli do istega rezultata, kot se bralec lahko sam prepriča. Tako smo dokazali izrek:

Matrika A ima inverzno matriko natanko tedaj, ko je njena determinanta $ad - bc$ različna od 0.

Podobnih problemov, kot smo jih obravnavali doslej, je še mnogo. Podobno, kot smo študirali matrike dimenzije 2 x 2, bi lahko študirali tudi matrike 3 x 3:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

ali celo matrike, ki imajo še več vrstic in stolpcev. Če bi za zgornjo matriko A želeli rešiti npr. enačbo $A^2 = -I$, bi naleteli na sistem devetih kvadratnih enačb z devetimi neznankami. Take sisteme je izredno težko reševati po poti, ki smo jo ubrali pri matrikah 2 x 2. Očitno so naše direktne metode neprimerne za