PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **15** (1987/1988)
Številka 1
Strani 2–7

Anton Suhadolc:

MATRIKE KOT POSPLOŠITEV POJMA ŠTEVILA

Ključne besede: matematika, linearna algebra, matrike, matrične enačbe.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/15/869-Suhadolc.pdf

MATRIKE KOT POSPLOŠITEV POJMA ŠTEVILA
1. del

Znaten del matematike predstavljajo matematične discipline, ki študirajo računske operacije z različnimi matematičnimi količinami. Vsi poznamo npr. naravna števila in računske operacije z njimi, pa tudi ulomke, realna števila, nekateri celo kompleksna števila. Tu si bomo ogledali bolj nenavadno, a zelo pomembno posplošitev števil – *matrike* – in računanje z njimi. Zaradi enostavnosti se bomo omejili le na primer matrike dimenzije 2 x 2:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad a, b, c, d \text{ so števila} \tag{1}$$

Matriko določa torej četverka števil, ki pa imajo točno določena mesta. Imenujemo jih matrični elementi. Matrika A ima dve vrstici in dva stolpca. Npr. prva vrstica je $[a, b]$, drugi stolpec pa $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$. Matrika je pripravna tabela, v kateri lahko podamo množico podatkov. Take tabele srečamo v življenju vsak dan, npr. pri športni stavi, pri objavi rezultatov šahovskega turnirja, pri preglednici dnevnih temperatur itd. Vendar nas v tem sestavku ta stran matrik ne bo zanimala.

Za cilj si zastavimo, kako z matrikami računati. Najprej se vprašamo, kdaj imamo dve matriki za enaki. Naravna se zdi definicija: dve matriki sta enaki, če se ujemata v vseh istoležnih elementih. Bolj na dolgo: naj bo A matrika iz enačbe (1) in

$$B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

Matriki A in B sta enaki, v znakih $A = B$, če je $a = e, b = f, c = g$ in $d = h$.

S seštevanjem matrik ne bo težav. Rekli bomo: matriki A in B seštejemo tako, da seštejemo istoležne matrične elemente. Vsota zgornjih matrik A in B je torej

$$A + B = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} \tag{2}$$

Primer: Seštejmo matriki A in B, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Po navodilu (2) dobimo

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & 1\frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Prav lahko se prepričamo, da za poljubni matriki A in B velja $A + B = B + A$. Za vsoto treh matrik A, B in C pa velja $(A + B) + C = A + (B + C)$. Pri številih imamo tudi odlikovano število o z lastnostjo: če o prištejemo k poljubnemu drugemu številu, se to nič ne pozna: $a + o = a$. Ali obstaja tudi matrika s podobno lastnostjo? Gotovo je že vsak sam uganil, katera matrika je to. Označimo jo s simbolom O, vsi njeni elementi naj bodo o

$$O = \begin{bmatrix} o & o \\ o & o \end{bmatrix}$$

V navodilu (2) za seštevanje vzemimo namesto matrike B matriko O in dobimo $A + O = A$. Zato imenujemo matriko O *matrično ničlo ali ničelno matriko.*

Za matrike lahko definiramo tudi računsko operacijo množenje matrike s številom. Naj bo k število , A pa matrika iz enačbe (1). Matrika kA naj bo

$$kA = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix} \tag{3}$$

Dogovorimo se še, da naj pomeni Ak isto kot kA. Za produkt matrike s številom veljajo nekateri računski zakoni, podobni zakonom za računanje s števili:

$$\begin{array}{lll} k(A + B) = kA + kB & & (k + h)\,A = kA + hA \\ 1.A = A & o.A = O & (kh)\,A = k\,(h\,A) \end{array} \tag{4}$$

Veljavnost vseh petih zakonov zlahka preverimo npr. tako, da za vsakega od njih zapišemo desno in levo stran in upoštevamo definiciji seštevanja matrik in množenja matrike s številom. Za zgled dokažimo npr. prvo pravilo. Leva stran je

$$k(A+B) = k\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k(a+e) & k(b+f) \\ k(c+g) & k(d+h) \end{bmatrix} \tag{5}$$

Desna stran prvega od pravil v enačbi (4) pa je

$$kA + kB = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ke & kf \\ kg & kh \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka + ke & kb + kf \\ kc + kg & kd + kh \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Če pri matričnih elementih zadnje matrike v enačbi (5) odpravimo oklepaje, dobimo prav zadnjo matriko v enačbi (6). Pravilo je dokazano.

V posebnem lahko matriko A množimo tudi s številom -1: $(-1)A$. Navada je, da to matriko označimo kar z $-A$. Imenujemo jo k matriki A nasprotna matrika. Ima zanimivo lastnost

$$A + (-1)\,A = O$$

kar zlahka preverimo. Matrika $-A$ je uporabna tudi za definicijo razlike dveh matrik. Razliko $A - B$ definiramo takole:

$$A - B = A + (-B)$$

Zgornje navodilo, napisano na dolgo, da

$$A - B = \begin{bmatrix} a - e & b - f \\ c - g & d - h \end{bmatrix}$$

Pri realnih številih znamo vedno rešiti linearno enačbo z eno neznanko oblike $a + x = b$, kjer sta a in b dani števili. Rešitev enačbe je seveda $x = b - a$. Podobno vprašanje si lahko zastavimo za matrike. Reši enačbo $A + X = B$, kjer sta A in B dani matriki. Odgovor je na dlani: $X = B - A$.

Pri vseh računskih operacijah, ki jih poznamo za števila, ne gre prenos na matrike tako gladko. Tudi pri relacijah se zatakne. Za dani realni števili a in b vedno velja ena od treh možnosti: ali je $a < b$, ali je $a = b$, ali je $a > b$. Za matrike se ne da definirati relacija $A > B$ tako, da bi ta relacija imela iste lastnosti kot relacija $a > b$ za realni števili. Seveda bi mogli poskusiti z očitno idejo $A > B$, če je $a > e$, $b > f$, $c > g$ in $d > h$. Če vzamemo npr.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

potem očitno ne velja niti $A < B$ niti $A = B$ niti $A > B$. Zato zaenkrat opustimo misel na to, kako bi primerjali dve matriki.

Doslej smo spoznali, da lahko seštejemo in odštejemo poljubni matriki, pa tudi matriko znamo množiti s številom. Za te operacije veljajo "običajni" računski zakoni. Števila se dajo med seboi tudi množiti, pa se vprašajmo, ali se da definirati tudi produkt dveh matrik. Da se, pa še na različne načine. Izkazalo se je, da je v matematiki koristna predvsem tale definicija produkta dveh matrik A in B, kjer pa moramo povedati, katera matrika je prvi in katera drugi faktor v produktu.

$$AB = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} \tag{7}$$

Predpis za izračun produkta je dokaj zamotan. Opazimo pa tole: element matrike AB, ki je v prvi vrstici in v prvem stolpcu, tj. $ae + bg$, izračunamo tako, da elementa prve vrstice matrike A pomnožimo z istoležnima elementoma prvega stolpca matrike B in produkta seštejemo. Podobno velja za ostale elemente matrike AB. Npr. element v drugi vrstici in v prvem stolpcu matrike AB dobimo tako, da elementa druge vrstice matrike A pomnožimo z elementoma prvega stolpca matrike B in produkta seštejemo.

Primer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$$

Produkt smo izračunali po navodilu (7). Izračunajmo za vajo še produkt matrik A in B v drugem vrstnem redu, torej BA.

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Rezultat nas preseneti: BA ni enako AB! Tako smo spoznali, da množenje matrik ni komutativno.

Če za dani matriki A in B velja $AB = BA$, rečemo, da sta matriki A in B *zamenljivi* ali *komutativni*.

Naloga: Pomnoži matriko A iz enačbe (1) z matriko O.

Kratek račun nam pokaže, da veljata enačbi $A.O = O$ in $O.A = O$. Od tod spoznamo dvoje: matrika O se vede pri produktu tako kot število *o* pri množenju števil in matrika O komutira z vsako matriko.

Spet smo radovedni. Ali komutira matrika A samo z matriko O? Odgovor je ne. Matrika A komutira npr. tudi sama s seboj: $A.A = A.A$. Pa si zadajmo nalogo: poišči vse matrike, ki komutirajo z dano matriko A, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Če neka matrika X komutira z A, potem seveda velja $A.X = X.A$. Pa naj bo iskana matrika X

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} \tag{8}$$

Izračunamo oba produkta $A.X$ in $X.A$ in dobimo

$$A.X = \begin{bmatrix} 2x+z & 2y+u \\ 3z & 3u \end{bmatrix} \qquad X.A = \begin{bmatrix} 2x & x+3y \\ 2z & z+3u \end{bmatrix}$$

Po definiciji enakosti dveh matrik sledijo iz pogoja $A.X = X.A$ štiri linearne enačbe

$$2x + z = 2x \qquad 3z = 2z \qquad 2y + u = x + 3y \qquad 3u = z + 3u$$

Prva enačba pove $z = 0$, prav to trdi tudi druga enačba. Tretjo prepišemo v obliki $u = x + y$, četrta pa spet zahteva $z = 0$. Rešitev zgornjega sistema enačb je torej

$$z = 0, u = x + y$$

Neznanki x in y sta poljubni števili. Zato ima matrična enačba $A.X = X.A$ neskončno mnogo rešitev, danih s formulo

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x+y \end{bmatrix}, \qquad x, y \text{ poljubni števili}$$

Zapišimo nekaj posebnih primerov matrike X. Pri $x = 1$ in $y = 0$ dobimo

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

pri izbiri $x = 1$ in $y = 1$ pa $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Za $x = 0$ in $y = 0$ dobimo spet $X = O$.

Naloga: Poišči vse matrike, ki komutirajo z matriko A iz enačbe (1)!

Račun poteka podobno kot zgoraj. Z nekaj več truda se da pokazati, da ta matrika A komutira natanko s tistimi matrikami X, ki se dajo zapisati v obliki $X = kA + hI$, kjer sta k in h poljubni števili.

Za produkt treh števil velja računski zakon $(ab)c = a(bc)$, tj. asociativnost množenja. Enostaven, a daljši račun pokaže, da velja tudi za poljubne tri matrike A, B in C asociativnostni zakon $(AB)C = A(BC)$. Za računanje s števili velja tudi distributivnostni zakon, tj. $a(b + c) = ab + ac$. Tudi za množenje in sešte-