PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **14** (1986/1987)
Številka 2
Strani 110–111

Dragoljub M. Milošević, prevod Peter Šemrl:

DIRICHLETOV PRINCIP

Ključne besede: matematika, razvedrilo.

Elektronska verzija:
http://www.presek.si/14/826-Milosevic-Semrl-Dirichlet.pdf

DIRICHLETOV PRINCIP

Pri reševanju raznih problemskih nalog, še posebej pri tistih, ki zahtevajo dokaz obstoja objektov z neko določeno lastnostjo, nam pogosto pomaga Dirichletov princip, imenovan po nemškem matematiku P.G.L. Dirichletu (1805 – 1859). Ta preprosti princip ima več popularnih imen, na primer: "problem zajčkov in kletk", "problem škatel in kroglic" in podobno. Lahko ga formuliramo takole:

Če je v n škatlah spravljeno več kot n kroglic, potem mora vsaj ena škatla vsebovati več kot eno kroglico.

Z nekaj primeri bomo sedaj ilustrirali uporabo tega principa.

ZGLED 1. Dokažimo, da sta med desetimi slučajno izbranimi naravnimi števili vsaj dve taki števili, da je njuna razlika deljiva z 9.

REŠITEV. Pri deljenju naravnega števila z 9 je lahko ostanek eno izmed števil: 0, 1, 2, ..., 7, 8. Ker imamo 10 števil in s tem tudi 10 ostankov, ki pa lahko zavzamejo največ 9 različnih vrednosti, nam Dirichletov princip pove, da imata vsaj dve med desetimi izbranimi števili isti ostanek pri deljenju z 9. Označimo ti dve števili z n_1 in n_2 in s črko r njun skupni ostanek pri deljenju z 9. Tedaj imamo

$$n_1 = 9k + r \quad \text{in} \quad n_2 = 9m + r$$

kjer sta m in k naravni števili. Zato je njuna razlika $n_1 - n_2 = 9(k - m)$ deljiva z 9. Dokaz je s tem končan.

ZGLED 2. V razredu je 20 učencev. Pri šolski nalogi iz matematike nihče od učencev ni napravil več kot 5 napak. Dokažimo, da so vsaj štirje učenci napravili isto število napak.

REŠITEV. Razvrstimo učence v "škatle", tako da v isto "škatlo" spravimo učence, ki so napravili enako število napak. Ker so učenci napravili 0, 1, 2, 3, 4 ali 5 napak, je takih "škatel" šest. V za nas najbolj neugodnem primeru bi bili v vsaki "škatli" po trije učenci, torej dva ostaneta (20=6.3+2). Na osnovi Dirichletovega principa obstaja "škatla", v kateri so vsaj štirje učenci, kar je bilo potrebno dokazati.

ZGLED 3. V pravilnem dvanajstkotniku pobarvamo nekatere izmed diagonal. Dokažimo, da obstajata vsaj dve oglišči, v katerih se končuje enako število pobarvanih diagonoal.